Nachklausur zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2012

01.10.2012, 15-18 Uhr — Prof. Dr. Norbert Dragon, PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

---

Name: ______________________

Matrikelnr.: ______________________

#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Σ
Pkte								

[K0] *Kurzfragen* **[$1+1+1+1+1+1=6$ Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Wie lautet die allgemeinste Lösung der Wellengleichung in zwei Dimensionen, $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t,x) = 0$?

(b) Was können Sie qualitativ zur Fouriertransformation einer konstanten Funktion $g(x) = 1$ sagen?

(c) Was gibt der Poynting-Vektor des elektromagnetischen Feldes an?

(d) Wie ist das elektrische Dipolmoment definiert?

(e) Was besagt die Kontinuitätsgleichung?

(f) Wie ist der Maxwellsche Feldstärketensor F_{mn} durch das Viererpotential A_m gegeben?

[K1] *Quadrupoltensor* **[$2+2=4$ Punkte]**

Ein Quadrupoltensor habe die Form $Q = q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren.

[K2] *Integralsätze* **[3 Punkte]**

Bestimmen Sie mit dem Satz von Gauss durch Integration über Kugelschalen das elektrische Feld innerhalb einer kugelsymmetrischen, zeitunabhängigen Ladungsverteilung.

[K3] *Fouriertransformation* **[$1+1+2=4$ Punkte]**

Berechnen Sie die Fouriertransformation $\tilde{g}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\, g(\vec{x})$ der Funktion

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-|\vec{x}|^2}\,.$$

(a) Wählen Sie die z-Achse in Richtung von $\vec{k}$ und drücken Sie das Skalarprodukt im Exponenten in Kugelkoordinaten aus. Die Integration über φ ist nun ganz einfach.

(b) Die Integration über $\cos\theta$ lässt sich nun elementar ausführen.

(c) Führen Sie die abschließende Integration über r aus. *Hinweis*: $\int_{-\infty}^{\infty} r\mathrm{d}r \exp(-(r + \mathrm{i}k/2)^2) = \frac{k}{2\mathrm{i}}\sqrt{\pi}$.

[K4] *Residuensatz* **[$2+2=4$ Punkte]**

Betrachten Sie das Integral $\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, \frac{1}{z^2 - \mathrm{i}z + 1}$, wobei Γ der im Gegenzeigersinn durchlaufene Einheitskreis sei, parametrisiert als $\theta \mapsto z(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(a) Berechnen Sie dieses Integral mit dem Residuensatz. Geben Sie dazu an, wo die Pole des Integranden liegen und welchen Wert das Residuum des Pols hat, der im Einheitskreis liegt.

(b) Zeigen Sie, dass dieses komplexe Wegintegral dem Integral $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \frac{2\mathrm{i}\cos\theta - 1}{4\cos^2\theta + 1}$ gleich ist. *Hinweis*: Am Schluss Zähler und Nenner geeignet erweitern.

[K5] *Ableitungen* **[3 Punkte]**

Zeigen Sie in Indexnotation $\big((\mathrm{rot}\vec{A}) \times \vec{A}\big)^i = \partial_k\big(A^i A^k - \frac{1}{2}\delta^{ik}\vec{A}^2\big) - A^i \mathrm{div}\vec{A}$. *Hinweis*: Um die Gleichheit zu zeigen, empfiehlt es sich, beide Seiten in Indexnotation auszuwerten und die Produktregel anzuwenden. Es ist $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

[K6] *Elektromagnetisches Feld* **[$2+2=4$ Punkte]**

Im Vakuum gelten die Maxwell-Gleichungen $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$ und $\mathrm{rot}\vec{B} - \partial_t\vec{E} = 0$.

(a) Folgern Sie daraus, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ jeweils komponentenweise die Wellengleichungen $\Box C^i = 0$ erfüllen, wobei $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \partial_t^2 - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ und $\vec{C} \in \{\vec{E}, \vec{B}\}$ ist. *Hinweis*: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$.

(b) Welcher Bedingung müssen die Frequenz ω und der Wellenvektor $\vec{k}$ genügen, damit die ebene Welle

$$\vec{\phi}(t,\vec{x}) = \Re\mathrm{e}\Big(a_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\Big)$$

die Wellengleichung $\Box\phi = 0$ erfüllt? Hierbei bezeichnet $\Re\mathrm{e}$ den Realteil.